Électromagnétisme – Chapitre 3

Magnétostatique

I. Courant et champ magnétostatique 1
I.1. Distribution de courants 1
I.2. Symétries et invariances 3
II. Conservation du flux 4
III. Théorème d'Ampère 5
III.1. Énoncé du théorème 5
III.2. Application au champ créé par un fil rectiligne infini 6

Dans le cadre de la magnétostatique, nous nous limitons à l'étude des champs magnétiques stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps, que l'on appelle alors **champs magnétostatiques** $\vec{B}(M)$.

I. Courant et champ magnétostatique

I.1. Distribution de courants

On rappelle que l'**intensité électrique** à travers une surface correspond à la charge électrique qui traverse cette surface par unité de temps, elle s'exprime en ampère (A).

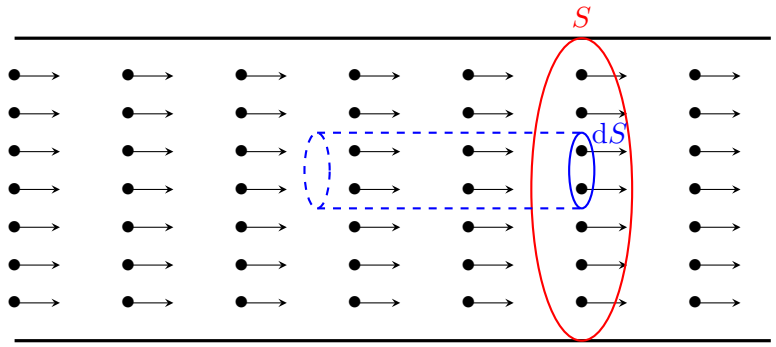
En notant $\mathrm{d}Q$ la charge électrique qui traverse la surface S pendant un temps $\mathrm{d}t$, on peut exprimer l'intensité électrique :

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

On souhaite exprimer l'intensité électrique dans un milieu présentant une **densité volumique de particules** n, c'est-à-dire composé de n particules par unité de volume, chaque particule possédant une même charge q et une même vitesse $\vec{v}$. La densité volumique de charges d'un tel milieu est :

$$\rho = n\,q.$$

On considère dans un premier temps une surface S dont la normale est orientée selon $\vec{v}$.



Les particules traversant une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ pendant $\mathrm{d}t$ sont comprises dans le cylindre de volume $v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$, et représentent donc une charge $\rho\,v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$. On en déduit la charge totale traversant la surface S pendant $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}Q = \iint_S \rho\,v\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S$$

d'où l'expression de l'intensité électrique :

$$i = \iint_S \rho\, v \,\mathrm{d}S.$$

On peut généraliser ce résultat pour une surface S quelconque, dont la normale n'est pas forcément orientée selon $\vec{v}$, et on obtient alors l'expression de l'intensité électrique :

$$i = \iint_S \rho\, \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Pour justifier le produit scalaire, on peut prendre l'exemple d'une surface S confondue avec les parois du conducteur, on obtient alors $\mathrm{d}\vec{S} \perp \vec{v}$, et donc une intensité électrique nulle à travers cette surface.

On définit le **vecteur densité volumique de courants** :

$$\boxed{\vec{j} = \rho\, \vec{v} = n\, q\, \vec{v}}$$

il s'exprime en $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.

L'intensité électrique à travers une surface S quelconque peut alors s'exprimer :

$$\boxed{i = \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

elle correspond au flux du vecteur densité volumique de courants à travers cette surface.

Application :

> On considère un câble en cuivre cylindrique de section $S = 2\,\mathrm{mm}^2$ parcouru par une intensité $i = 1\,\mathrm{A}$. Sachant que la densité volumique d'électrons libres dans le cuivre est de l'ordre de $n \sim 10^{29}\,\mathrm{m}^{-3}$, déterminons l'ordre de grandeur de la vitesse moyenne des électrons libres dans le câble.
> Comme les électrons libres de charge $q = -e = -1{,}6.10^{-19}\,\mathrm{C}$ se déplacent dans le sens opposé au courant, on obtient en supposant le milieu homogène : $i = \vec{j} \cdot \vec{S} = j\, S = n\,(-e)\,(-v)\,S$, d'où une vitesse moyenne : $v = \dfrac{i}{n\, e\, S} \sim 10^{-5}\,\mathrm{m \cdot s}^{-1}$.

Dans le cas d'un milieu présentant plusieurs espèces chargées, comme par exemple un électrolyte constitué d'anions et de cations, le vecteur densité volumique de courants s'exprime :

$$\vec{j} = \sum_i n_i\, q_i\, \vec{v}_i.$$

En présence de plusieurs courants, les champs magnétostatiques créés par chacun de ces courants s'additionnent. On en déduit alors que le champ magnétostatique vérifie le **principe de superposition** : le champ magnétostatique créé par un ensemble de courants est la somme des champs créés par chacun des courants, soit :

$$\vec{B}(M) = \sum_i \vec{B}_i(M)$$

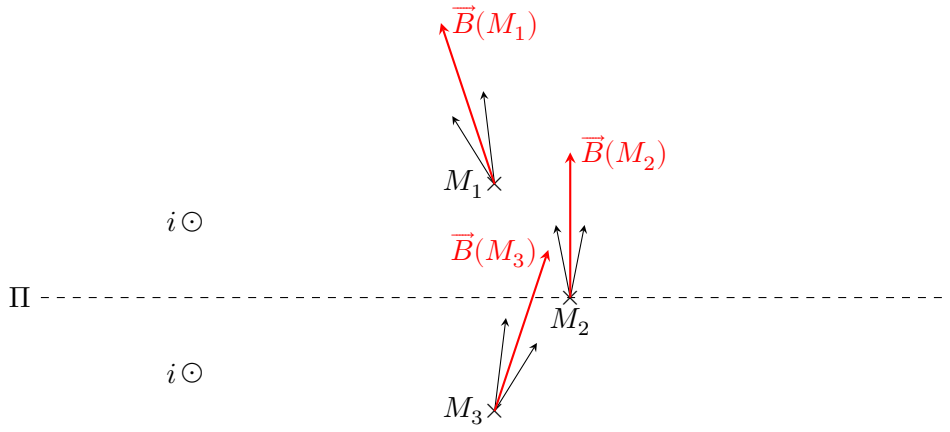
comme pour le champ électrostatique.

I.2. Symétries et invariances

Symétrie

Un plan Π est un **plan de symétrie** de la distribution de courants si pour tout point A présentant un vecteur densité volumique de courants, le point A' (symétrique de A par rapport à ce plan) présente un vecteur densité volumique de courants identique.

Pour illustrer l'effet d'un plan de symétrie, on représente ci-dessous le champ magnétostatique créé par deux fils parallèles parcourus par une intensité identique, avec $i > 0$, en différents points.



On observe que les champs $\vec{B}(M_1)$ et $\vec{B}(M_3)$ sont antisymétriques par rapport au plan Π, et que le champ $\vec{B}(M_2)$ est perpendiculaire au plan Π.

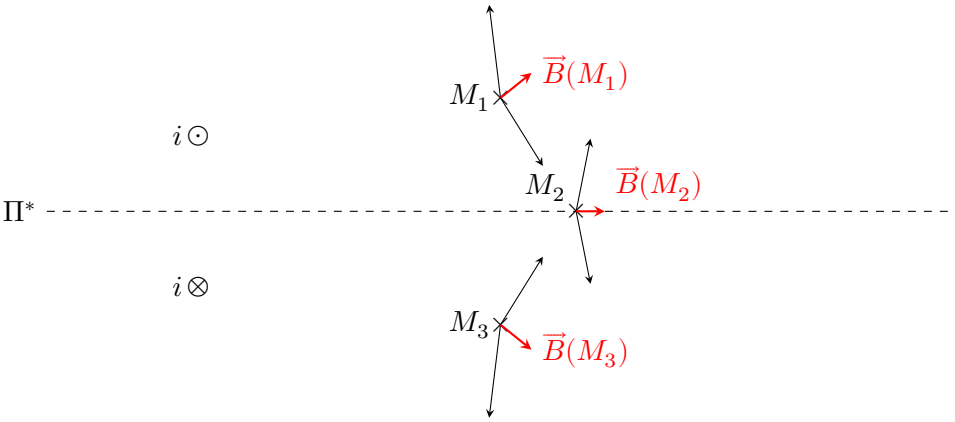
En généralisant ces observations, on peut montrer que :

- le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est **antisymétrique** par rapport à un plan de symétrie Π ;
- pour tout point M situé sur un plan de symétrie Π, le champ $\vec{B}(M)$ est **perpendiculaire** à ce plan.

Antisymétrie

Un plan Π^* est un **plan d'antisymétrie** de la distribution de courants si pour tout point A présentant un vecteur densité volumique de courants, le point A' (symétrique de A par rapport à ce plan) présente un vecteur densité volumique de courants opposé.

Pour illustrer l'effet d'un plan d'antisymétrie, on représente ci-dessous le champ magnétostatique créé par deux fils parallèles parcourus par une intensité opposée, avec $i > 0$, en différents points.



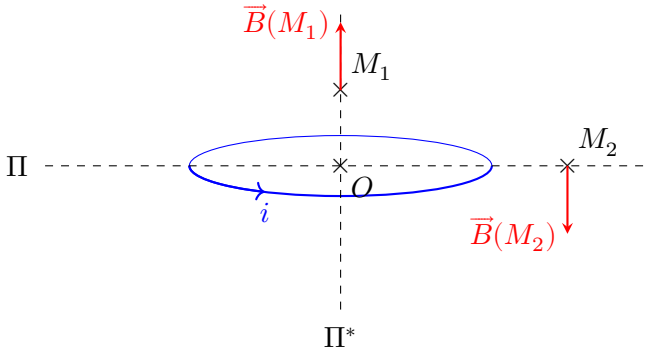
On observe que les champs $\vec{B}(M_1)$ et $\vec{B}(M_3)$ sont symétriques par rapport au plan Π^*, et que le champ $\vec{B}(M_2)$ est contenu dans le plan Π^*.

En généralisant ces observations, on peut montrer que :

- le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est **symétrique** par rapport à un plan d'antisymétrie Π^* ;
- pour tout point M situé sur un plan d'antisymétrie Π^*, le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ est **contenu** dans ce plan.

Application :

Déterminons les plans de symétries et d'antisymétries de la distribution de courants pour cette spire circulaire, afin d'en déduire la direction du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ aux points M_1 et M_2.



- Tous les plans contenant l'axe (OM_1) sont des plans d'antisymétries de la distribution de courants, donc $\vec{B}(M_1)$ est contenu dans ces plans.
- Le plan de la spire est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc $\vec{B}(M_2)$ est perpendiculaire à ce plan.

Invariance

Comme pour le champ électrostatique, les **invariances** d'une distribution de courants se retrouvent dans le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé.

Application :

À l'aide des symétries et des invariances, déterminons la direction et les variables dont dépend le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par un fil infini rectiligne d'axe (Oz) parcouru par un courant.
On considère un point $M(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques.
Étude des symétries : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\vec{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\,\vec{e}_\theta$.
Étude des invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où : $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$.

II. Conservation du flux

On admet la propriété suivante :

- le flux du champ magnétostatique sortant à travers une surface fermée S est forcément nul, on dit que le flux du champ magnétostatique est **conservatif** :

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 .$$

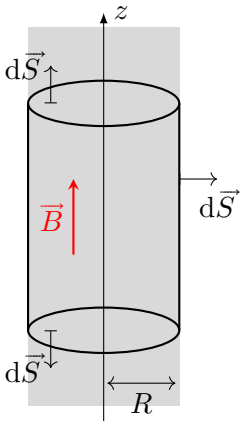
Cette propriété est également vérifiée lorsque le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ dépend du temps, et nous le montrerons dans un prochain chapitre à l'aide des équations de Maxwell.

Application :

On considère un solénoïde infini d'axe (Oz) et de rayon R parcouru par un courant constant. On admet que le champ magnétostatique à l'intérieur du solénoïde est uniforme et s'exprime : $\vec{B}(M) = B\,\vec{e}_z$.
Montrons que le flux du champ magnétostatique sortant d'un tronçon du solénoïde est bien conservatif.

On exprime le flux du champ magnétostatique :

- à travers la surface latérale :
$$\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} (B\,\vec{e}_z)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = 0\,;$$
- à travers la surface supérieure :
$$\iint_{S_{\text{sup}}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{sup}}} (B\,\vec{e}_z)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = B\,\pi\,R^2\,;$$
- à travers la surface inférieure :
$$\iint_{S_{\text{inf}}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{sup}}} (B\,\vec{e}_z)\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = -B\,\pi\,R^2\,;$$



d'où le flux du champ magnétostatique sortant du tronçon :
$$\oiint_{S_{\text{tronçon}}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_{\text{sup}}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_{\text{inf}}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0.$$

III. Théorème d'Ampère

III.1. Énoncé du théorème

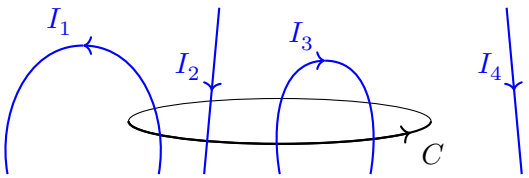
On admet le **théorème d'Ampère** :

- la circulation du champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé et orienté C est :
$$\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\,I_{\text{enl}}$$

avec I_{enl} l'intensité enlacée par ce contour, c'est-à-dire la somme **algébrique** des intensités qui traversent une surface s'appuyant sur ce contour.

Application :

Exprimons l'intensité enlacée par le contour C.



On obtient avec la règle de la main droite : $I_{\text{enl}} = I_1 - I_2 + I_3 - I_3 = I_1 - I_2$.

Pour appliquer le théorème d'Ampère, on utilisera la méthodologie suivante :

1. choisir un système de coordonnées adapté ;
2. étudier les symétries de la distribution de courants pour obtenir la direction du champ $\vec{B}(M)$;
3. étudier les invariances de la distribution de courants pour obtenir les variables dont dépend le champ $\vec{B}(M)$;
4. définir un contour fermé et orienté C, appelé **contour d'Ampère**, permettant d'exprimer facilement $\oint_C \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$:
   - soit avec des portions telles que $\vec{B}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell}$ sont colinéaires, on a alors : $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = B\,\mathrm{d}\ell$,

- soit avec des portions telles que $\vec{B}$ et $\mathrm{d}\vec{\ell}$ sont orthogonaux, on a alors : $\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$,

5. exprimer l'intensité enlacée I_{enl} par le contour d'Ampère ;
6. appliquer le théorème d'Ampère pour en déduire le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$.

III.2. Application au champ créé par un fil rectiligne infini

On considère un fil rectiligne infini d'axe (Oz) parcouru par une intensité I.

Nous allons déterminer l'expression du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème d'Ampère.

Choix du système de coordonnées : on considère un point $M(r, \theta, z)$ en coordonnées cylindriques.

Étude des symétries : le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, et comme $\vec{B}(M)$ doit être perpendiculaire à ce plan, on en déduit que :

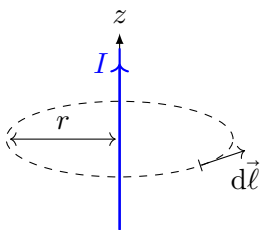
$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\, \vec{e}_\theta.$$

Étude des invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z et par rotation selon θ, d'où :

$$\vec{B}(M) = B(r)\, \vec{e}_\theta.$$

Définition du contour d'Ampère : on choisit un cercle d'axe (Oz) de rayon r et orienté selon $\vec{e}_\theta$, d'où :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C (B(r)\, \vec{e}_\theta) \cdot (\mathrm{d}\ell\, \vec{e}_\theta) = \oint_C B(r)\, \mathrm{d}\ell = B(r) \oint_C \mathrm{d}\ell = B(r)\, 2\,\pi\, r.$$



Expression de l'intensité enlacée par le contour d'Ampère : $I_{\text{enl}} = I$.

Application du théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0\, I_{\text{enl}}$$

soit :

$$B(r)\, 2\,\pi\, r = \mu_0\, I$$

d'où on en déduit le champ magnétostatique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\, \vec{e}_\theta.$$

On peut représenter son évolution :

